About extension problems related to the fractional Laplacian

Marco A. Cornejo Palominos
Instituto de Matemática, Universidad de Talca

Defensa de proyecto de Tesis

Octubre de 2020

Contenidos de la presentación

Contenidos de la presentación

Definiciones

- Sea $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado, de borde suave que contiene el origen.

Definiciones

- Sea $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado, de borde suave que contiene el origen.
- Consideraremos Ω como la restricción de $\tilde{\Omega}$ al primer ortante, y su intersección con los ejes. Eso es,

$$\Omega = \tilde{\Omega} \cap \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \ldots, N\}\}$$

Definiciones

- Para $A \in (\mathbb{R}_+)^N$ y $x \in (\mathbb{R}_+)^N$, se define el siguiente monomio

$$x^A = x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ \ldots \ \cdot x_N^{a_N}$$

Definiciones

- Para $A \in (\mathbb{R}_+)^N$ y $x \in (\mathbb{R}_+)^N$, se define el siguiente monomio
$$x^A = x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_N^{a_N}$$
- En lo consiguiente, $M : \Omega \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ será una matriz simétrica lo suficientemente regular para la cual existen constantes $\Lambda \geq \lambda > 0$ tales que
$$\lambda x^{2A}|\xi|^2 \leq \xi^t M(x)\xi \leq \Lambda x^{2A}|\xi|^2$$
Para todos $x \in \Omega$ y $\xi \in \mathbb{R}^N$

Contenidos de la presentación

La ecuación a considerar

- Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} -div(M\nabla u) + b\cdot\nabla u + cu = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

donde $b : \Omega \to \mathbb{R}^N$ y $c : \Omega \to \mathbb{R}$ son funciones suficientemente regulares, y f es una función dada.

La ecuación a considerar

- Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} -div(M\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

  donde $b : \Omega \to \mathbb{R}^N$ y $c : \Omega \to \mathbb{R}$ son funciones suficientemente regulares, y f es una función dada.
- Nuestro objetivo primario será encontrar soluciones a esta ecuación. El esquema para esta tarea lo pasamos a detallar a continuación:

Plan de acción

- Primero, será necesario definir el espacio donde tendrá sentido la solución, y el sentido que tendrá esta. A saber, definiremos nuestro espacio de trabajo como

$$D^{1,p,A}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_{1,p,A,\Omega}}$$

Plan de acción

- Primero, será necesario definir el espacio donde tendrá sentido la solución, y el sentido que tendrá esta. A saber, definiremos nuestro espacio de trabajo como

$$D^{1,p,A}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_{1,p,A,\Omega}}$$

- Con $||u||_{1,p,A,\Omega} = ||x^A \nabla u||_{L^p(\Omega)}$

Plan de acción

- Primero, será necesario definir el espacio donde tendrá sentido la solución, y el sentido que tendrá esta. A saber, definiremos nuestro espacio de trabajo como

$$D^{1,p,A}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_{1,p,A,\Omega}}$$

- Con $||u||_{1,p,A,\Omega} = ||x^A \nabla u||_{L^p(\Omega)}$
- Nos interesará conocer las propiedades de esta familia de espacios para abordarlos en profundidad.

Plan de acción

- Primero, será necesario definir el espacio donde tendrá sentido la solución, y el sentido que tendrá esta. A saber, definiremos nuestro espacio de trabajo como

$$D^{1,p,A}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_{1,p,A,\Omega}}$$

- Con $||u||_{1,p,A,\Omega} = ||x^A \nabla u||_{L^p(\Omega)}$
- Nos interesará conocer las propiedades de esta familia de espacios para abordarlos en profundidad.
- Comenzaremos con el caso $p = 2$.

Plan de acción

- En $D^{1,2,A}(\Omega)$, definiremos la siguiente forma bilineal asociada a la ecuación anterior:

$$B[u,v] = \int_{\Omega} (M\nabla u)\cdot\nabla v + (b\cdot\nabla u)v + cuv$$

Plan de acción

- En $D^{1,2,A}(\Omega)$, definiremos la siguiente forma bilineal asociada a la ecuación anterior:

$$B[u,v] = \int_\Omega (M\nabla u)\cdot\nabla v + (b\cdot\nabla u)v + cuv$$

- Nuestra intención es encontrar $u \in D^{1,A,2}(\Omega)$ tal que se cumpla la igualdad

$$B[u,v] = \int_\Omega fv \tag{2}$$

para todo $v \in D^{1,A,2}(\Omega)$.

Plan de acción

- En $D^{1,2,A}(\Omega)$, definiremos la siguiente forma bilineal asociada a la ecuación anterior:

$$B[u,v] = \int_{\Omega} (M\nabla u) \cdot \nabla v + (b \cdot \nabla u)v + cuv$$

- Nuestra intención es encontrar $u \in D^{1,A,2}(\Omega)$ tal que se cumpla la igualdad

$$B[u,v] = \int_{\Omega} fv \tag{2}$$

para todo $v \in D^{1,A,2}(\Omega)$.

- A tal u que satisface (2) la llamaremos solución débil de (1)

Plan de acción

- Primero que algo, debemos asegurar existencia y unicidad de dicha solución débil en nuestro espacio $D^{1,2,A}(\Omega)$. El uso de herramientas como el Teorema de Lax-Milgram y del Teorema de la Alternativa de Fredholm serán cruciales.

Plan de acción

- Luego de obtener la única solución débil, debemos verificar si esta tiene mayor regularidad, dada la naturaleza de nuestro problema (Precisamos existencia de segundas derivadas). Este proceso requiere uso y abuso de cotas e inclusiones de $D^{1,2,A}(\Omega)$ en espacios más familiares, como $L^q(\Omega)$, $W^{1,q}(\Omega)$, $C^{0,\alpha}(\Omega)$, o variantes de estos espacios con un peso monomial ad-hoc.

Contenidos de la presentación

1. Una ecuación como punto de partida
   - Preliminares y definiciones
   - Primer problema
   - Propiedades espectrales del operador asociado
2. Referencias

Preguntas una vez resuelta la ecuación

Una vez demostrada existencia y solución de la ecuación en cuestión, nos interesaría revisar el operador

$$Lu = L_{A,N,M,\Omega,p,b,c}u := -div(M\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu$$

Hay múltiples razones para ello.

- Es la generalización del trabajo de H. Castro para $N = 1$ para $M = x^{2a}$. Es de interés revisar cómo cambia el espectro en función del vector A, así como también depende del valor de a en el caso $N = 1$

Preguntas una vez resuelta la ecuación

- El caso cuando $b = 0$, $c = 0$ y $f = 0$ con $M = x_N^{a_N}\mathcal{I}$ es trabajado por Caffarelli y Silvestre en 2008, asociándolo al problema de extensión

$$\begin{aligned} div(x_N^{a_N}\nabla u) &= 0 & x' \in \mathbb{R}^{N-1}, x_N > 0 \quad (3)\\ u(x',0) &= g(x') & x' \in \mathbb{R}^{N-1} \quad (4) \end{aligned}$$

Con $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N$.

Preguntas una vez resuelta la ecuación

- El caso cuando $b = 0$, $c = 0$ y $f = 0$ con $M = x_N^{a_N}\mathcal{I}$ es trabajado por Caffarelli y Silvestre en 2008, asociándolo al problema de extensión

$$div(x_N^{a_N}\nabla u) = 0 \qquad x' \in \mathbb{R}^{N-1}, x_N > 0 \tag{3}$$

$$u(x', 0) = g(x') \quad x' \in \mathbb{R}^{N-1} \tag{4}$$

  Con $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N$.

- La solución u satisface la siguiente relación

$$C(-\Delta)^{\frac{1-a_N}{2}} g = \lim_{x_N \to 0^+} x_N^{a_N} \partial_N u(x)$$

  para una constante C que depende de N y a_N

Preguntas una vez resuelta la ecuación

- Es razonable buscar qué operadores asociados aparecen en casos donde $M = x_{N-1}^{a_{N-1}} x_N^{a_N} I$ o $M = x^A I$, entre otros casos de interés, además de revisar las propiedades que estos posean.

Preguntas una vez resuelta la ecuación

- Es razonable buscar qué operadores asociados aparecen en casos donde $M = x_{N-1}^{a_{N-1}} x_N^{a_N} I$ o $M = x^A I$, entre otros casos de interés, además de revisar las propiedades que estos posean.
- En particular, por ejemplo, qué operador $\mathcal{L}$ se obtiene al considerar

$$\mathcal{L}u = \lim_{x_N \to 0^+} x^A \partial_N u(x)$$

Referencias

- H Castro - *Hardy-Sobolev-type inequalities with monomial weights, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 196 (2017), no. 2, 579–598. MR3624966*
- H. Castro and H. Wang - *A singular Sturm-Liouville equation under homogeneous boundary conditions, J. Functional Analysis 261 (2011), no. 6, 1542–1590. MR2813481 (2012f:34056)*
- H. Castro. - *The essential spectrum of a singular Sturm-Liouville operator, Mathematische Nachrichten 291 (2018), no. 4, 593–609.*
- L. Caffarelli and L. Silvestre - *An extension problem related to the fractional Laplacian*

Gracias Totales

Por su atención y su tiempo, muchas gracias.