

MODIFICACIÓN DE NASH SOBRE SUPERFICIES TÓRICAS

DEFENSA DE PROYECTO DE TESIS

Rolando Suárez Quevedo

Director:

Maximiliano Leyton Álvarez

Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

20 de Diciembre, 2019

Definiciones Básicas

Sean $k = \bar{k}$, $X \subseteq k^n$ una variedad algebraica y $p \in X$. Asumamos que $I(X) = \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle \subseteq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$

Para cada i , consideremos:

$$d_p(f_i) = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(p)x_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(p)x_n$$

Entonces el **espacio tangente Zariski** $T_p X$ es isomorfo al subespacio de k^n definido por las ecuaciones

$$d_p(f_1) = \dots = d_p(f_s) = 0$$

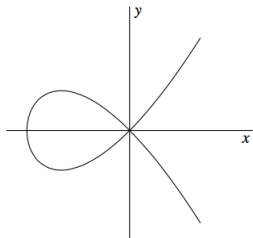
Observación:

$$\dim(T_p X) \leq n$$

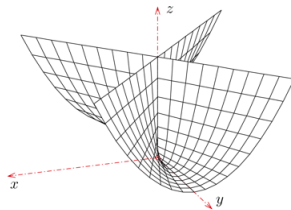
Definiciones Básicas

Un punto $p \in X$ es **suave** o no singular si $\dim(T_p X) = \dim_p(X)$.

Un punto $p \in X$ es **singular** si no es suave.



$$y^2 = x^2(1+x)$$



$$x^2z - y^2 = 0$$

Decimos que la variedad afín X es **no singular** si cada punto en X es suave.

Definiciones Básicas

Definición.

Una **resolución de singularidades** de una variedad singular X es:

- (1) Un morfismo propio birracional $\varphi : Y \rightarrow X$,
- (2) Y es una variedad no singular y
- (3) $Y \setminus \varphi^{-1}(\text{Sing}(X)) \cong X \setminus \text{Sing}(X)$

donde $\text{Sing}(X)$ denota el lugar singular de X .

La existencia de una resolución de singularidades de variedades algebraicas sobre un cuerpo de característica cero fue demostrada por H. Hironaka el año 1964.

En característica $p \geq 0$ es un problema abierto.

Modificación de Nash

Supongamos que X es una subvariedad afín de \mathbb{A}^k de dimensión m y consideremos la aplicación de Gauss, que asocia a cada punto no singular el espacio tangente a la variedad en dicho punto:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : X \setminus \text{Sing}(X) &\longrightarrow X \times \mathbb{G}(m, r) \\ p &\longmapsto (p, T_p X) \end{aligned}$$

Donde $\mathbb{G}(m, r)$ es la variedad Grassmaniana que parametriza espacios vectoriales de dimensión m en \mathbb{A}^k y $T_p X$ el espacio tangente de X en p . Denotemos por NX la adherencia de $\mathcal{G}(X \setminus \text{Sing}(X))$ en $X \times \mathbb{G}(m, r)$.

$$NX := \overline{\{(p, T_p X) \mid p \in X \setminus \text{Sing}(X)\}}$$

Modificación de Nash

La **Modificación de Nash** es el morfismo $\mathcal{N} : NX \rightarrow X$ inducido por la proyección de $X \times \mathbb{G}(m, r) \rightarrow X$.

$$\begin{array}{ccc}
 NX & \hookrightarrow & X \times G(m, r) \\
 & \searrow \mathcal{N} & \downarrow pr_X \\
 & & X
 \end{array}$$

Propiedades

1. La modificación de Nash es un morfismo proyectivo (en particular propio) birracional
2. Induce un isomorfismo entre $NX \setminus \mathcal{N}^{-1}(\text{Sing}(X))$ y $X \setminus \text{Sing}(X)$.
3. La modificación de Nash no depende de la inscrustación en el espacio afín k^r .

Modificación de Nash

Para que la modificación de Nash sea una resolución de singularidades, sólo nos bastaría conocer si NX tiene o no singularidades.

Si NX es singular, volvemos a aplicar otra vez la modificación de Nash y así sucesivamente.

$$X \xleftarrow{\mathcal{N}} N^1 X \xleftarrow{\mathcal{N}^2} N^2 X \xleftarrow{\mathcal{N}^3} \dots N^i X \xleftarrow{\mathcal{N}^i} \dots$$

donde $N^i X = NN^{i-1} X$. Notamos $\mathcal{N}^i : N^i X \rightarrow X$ la i -ésima modificación de Nash de X .

Es natural preguntarnos:

¿Existe i_0 tal que $N^{i_0} X$ es no singular?

En general, resolución de singularidades con modificación de Nash es **un problema abierto**.

Resultados conocidos y Observaciones:

- 1.- A. Nobile, en 1975 demostró que la modificación de Nash es un isomorfismo si y sólo si la variedad es no singular.
- 2.- La Modificación de Nash resuelve las singularidades para el caso de curvas.
- 3.- Rebasoo en 1977 muestra que la modificación de Nash resuelve las singularidades de la familia $\{z^p - x^p y^r\}$ para p, q y r en \mathbb{Z} .
- 4.- En característica $p > 0$, la Modificación de Nash no sirve.

Desde ahora $\text{char}(k) = 0$ a menos que se indique lo contrario.

Resultados conocidos y Observaciones:

En el contexto de variedades tóricas:

- 5.- La Modificación de Nash para el caso de variedades de dimensión mayor o igual a dos es un problema abierto, incluso para las superficies tóricas.
- 6.- En el 2012, P. González Perez y B. Teissier en paralelo con D. Grigoriev y P. Milman han demostrado que en el caso de variedades tóricas, la iteración de la modificación de Nash puede traducirse en un algoritmo puramente combinatorio.
- 7.- Duarte, en 2013, da una solución parcial al problema, en donde entrega criterios y un algoritmo combinatorio que permite verificar, en ciertos casos, que el Método de Nash funciona para superficies tóricas.

Conceptos básicos en Variedades Tóricas

Fijemos un par de espacios vectoriales duales $N_{\mathbb{R}}$ y $M_{\mathbb{R}}$.

Sea $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ un cono poliedral racional con semigrupo $S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$ y consideremos la variedad tórica normal afín asociada

$$X_{\sigma} = \text{Spec}(\mathbb{C}[S_{\sigma}])$$

La variedad tórica X_{σ} es suave si y sólo si el cono σ es suave, es decir, sus generadores minimales forman partes de una \mathbb{Z} -base en N .

Una resolución de singularidades de la variedad torica normal X_{σ} consiste en determinar un refinamiento suave Σ de σ tal que el morfismo tórico $\phi : X_{\Sigma} \rightarrow X_{\sigma}$ sea una resolución de singularidades.

Ejemplo 1: [Modificación de Nash]

Sea $X = \{(x, y, z) \in k^3 \mid z^n - xy = 0\}$ y consideremos un punto $p := (x_0, y_0, z_0)$ no singular, entonces

$$T_p X = \{(x, y, z) \mid -y_0 x - x_0 y + n z_0^{n-1} z = 0\}$$

$T_p C$ pasa por el origen, la podemos ver como un punto en $G(2, 3)$:

$$T_p X = [n z_0^{n-1} : -x_0 : -y_0]$$

Como $p = (x_0, y_0, z_0)$ debe cumplir con la parametrización de X , p tiene la forma $(u, u^{n-1}v^n, uv)$, entonces:

$$\begin{aligned} T_p X &= [n u^{n-1} v^{n-1} : -u : -u^{n-1} v^n] \\ &= [n u^{n-2} v^{n-1} : -1 : -u^{n-2} v^n] \end{aligned}$$

Ejemplo 1: [Modificación de Nash]

Por definición

$$NX = \overline{\left\{ \left((u, u^{n-1}v^n, uv), [nu^{n-2}v^{n-1} : -1 : -u^{n-2}v^n] \right) \in X \times \mathbb{P}^2 \right\}}$$

Como $NX \subset X \times \mathbb{P}^2$, podemos estudiar a NX en sus cartas afín. En particular, en $V_1 := X \times U_1$ tenemos:

$$\begin{aligned} NX \cap V_1 &\cong \overline{\left\{ \left(u, u^{n-1}v^n, uv, \frac{nu^{n-2}v^{n-1}}{-1}, \frac{-u^{n-2}v^n}{-1} \right) \in k^5 \right\}} \\ &\cong \overline{\left\{ \left(u, uv, u^{n-2}v^{n-1}, u^{n-2}v^n \right) \in k^4 \mid (u, v) \in (k^*)^2 \right\}} \end{aligned}$$

Definiciones y Resultados conocidos

Definiciones

Un **conjunto de exponentes monomiales** es $\xi := \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\} \subset \mathbb{Z}^2$ tal que $\mathbb{Z}\xi := \{\sum_{k=1}^r \lambda_k \gamma_k \mid \lambda_k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}^2$.

Consideremos la siguiente aplicación monomial:

$$\begin{aligned} \Phi_\xi : \quad (k^*)^2 &\longrightarrow k^r \\ x = (x_1, x_2) &\longmapsto (x^{\gamma_1}, \dots, x^{\gamma_r}) \end{aligned}$$

donde $x^{\gamma_k} := x_1^{\gamma_{k,1}} x_2^{\gamma_{k,2}}$ y $\gamma_k = (\gamma_{k,1}, \gamma_{k,2})$, para $k = 1, \dots, r$.

- i. Llamamos a $X := \overline{\Phi_\xi((k^*)^2)}$ una **variedad tórica afines**.
- ii. Decimos que X es **esencial** si $(0, 0) \notin \text{Conv}(\xi)$.
- iii. Decimos que $\xi_M = \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ es **minimal** si es un sistema de generadores minimal del semigrupo $\mathbb{Z}_{\geq 0}\xi$.

Definiciones y Resultados conocidos

Proposición 1

Una variedad tórica afines X es esencial si y sólo si $0 \in X$.

Proposición 2

Sea X una variedad tórica afines esencial, entonces NX está cubierta por variedades tóricas afines esenciales.

Proposición 3

La variedad tórica esencial $X = \overline{\Phi_{\xi}((k^*)^n)}$ de dimensión n , es no singular si y sólo si $\#(\xi_M) = n$, donde ξ_M es el conjunto de exponentes minimal.

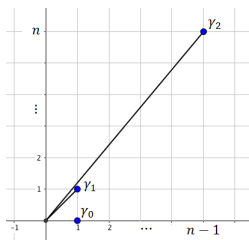
El L-algoritmo de Nash

Ejemplo 2 [L-algoritmo de Nash]

Sea $\xi = \{\gamma_1 = (1, 0), \gamma_2 = (1, 1), \gamma_3 = (n-1, n)\} \subset \mathbb{Z}^2$ conjunto de exponentes monomiales.

Induce la aplicación monomial:

$$\begin{aligned} \Phi_\xi : (k^*)^2 &\longrightarrow k^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, uv, u^{n-1}v^n) \end{aligned}$$



Cuya superficie tórica asociada es:

$$X = \{(x, z, y) \in k^3 \mid z^n - xy = 0\}.$$

1. La variedad tórica afín X es esencial, pues $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \notin \text{Conv}(\xi)$.
2. Fijemos una transformación lineal L tal que $L(\xi) \geq \mathbf{0}$, en este caso usaremos $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$. Esta transformación (siguiendo un criterio algorítmico) escoge el par γ_1 y γ_2 .

Ahora formamos los conjuntos:

$$\begin{aligned} A_{1,2}(\xi) &= \{ \gamma_k - \gamma_1 \mid k \in \{1, 2, 3\} \setminus \{1, 2\}, \det(\gamma_k \ \gamma_2) \neq 0 \} \\ &= \{ \gamma_3 - \gamma_1 \} = \{ (n-2, n) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2,1}(\xi) &= \{ \gamma_k - \gamma_2 \mid k \in \{1, 2, 3\} \setminus \{1, 2\}, \det(\gamma_k \ \gamma_1) \neq 0 \} \\ &= \{ \gamma_3 - \gamma_2 \} = \{ (n-2, n-1) \} \end{aligned}$$

3. Consideremos el conjunto

$$\begin{aligned}\xi_{1,2} &= A_{1,2}(\xi) \cup A_{2,1}(\xi) \cup \{\gamma_1, \gamma_2\} \\ &= \{(1, 0), (1, 1), (n-2, n-1), (n-2, n)\}\end{aligned}$$

Notar que $(0, 0) \notin \text{Conv}(\xi_{1,2})$

4. Finalmente, determinamos conjunto minimal ξ_M asociado a $\xi_{1,2}$ (en este caso $\xi_M = \xi_{1,2}$).

Si $\#\xi_M = 2$, entonces nos detenemos pues ésta carta afín sería lisa.

Si $\#\xi_M > 2$, volvemos a aplicar el algoritmo al conjunto ξ_M .

Resultados Iteración del L-algoritmo de Nash

Teorema 1 (Duarte, 2013)

Sea $\xi \subset \mathbb{Z}^2$ un conjunto de exponentes monomiales esencial de alguna superficie tórica. Entonces la iteración del L -algoritmo de Nash siguiendo la transformación lineal $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{ax} + \mathbf{by}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$ y $L(\xi_0) \geq 0$, obtenemos un conjunto de exponentes monomiales ξ'_M con 2 elementos.

Teorema 2 (Duarte, 2013)

Sea $\xi \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$ un conjunto de exponentes monomiales esencial de alguna superficie tórica. Entonces el L -algoritmo de Nash siguiendo la transformación lineal $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$ se detiene después de a lo mas

$$\kappa := 2 \cdot u_0(\xi) + 2^{u_0(\xi)-1} \cdot v_0(\xi) \text{ iteraciones}$$

donde $u_0(\xi) := \text{Max}\{L(\gamma_i) \mid \gamma_i \in \xi\}$; $v_0(\xi) := \text{Max}\{|C_x(\gamma_i)| \mid \gamma_i \in \xi\}$

Corolario

Sea $\xi \subset \mathbb{Z}^2$ un conjunto de exponentes monomiales esencial de alguna superficie tórica. Entonces la iteración del algoritmo siguiendo $L(x, y) = ax + by$ donde $\text{mcd}(a, b) = 1$ y $L(\xi) \geq 0$ produce un semigrupo generado por dos elementos en un máximo de

$$\kappa_R := 2 \cdot u'_0(\xi) + 2^{u'_0(\xi)-1} \cdot v'_0(\xi) \text{ iteraciones}$$

Donde

$$u'_0(\xi) := \text{Max}\{L(\gamma_i) \mid \gamma_i \in \xi\}$$

$$v'_0(\xi) := \text{Max}\{\beta\gamma_{1,i} - \alpha\gamma_{2,i} \mid \gamma_i = (\gamma_{1,i}, \gamma_{2,i}) \in \xi\} \text{ donde } \alpha a + \beta b = 1$$

Relación entre la Modificación y el L-algoritmo

En el **ejemplo 1** obtuvimos que:

$$N^1X \cap V_1 \cong \overline{\left\{ \left(u, uv, u^{n-2}v^{n-1}, u^{n-2}v^n \right) \in k^4 \mid (u, v) \in (k^*)^2 \right\}}$$

Por otro lado, en el **ejemplo 2**, el conjunto de exponentes monomiales ξ_M induce la aplicación:

$$\begin{aligned} \Phi_{\xi_{0,1}} : (k^*)^2 &\longrightarrow k^4 \\ (u, v) &\longmapsto (u, uv, u^{n-2}v^{n-1}, u^{n-2}v^n) \end{aligned}$$

Entonces:

$$N^1X \cap V_1 \cong \overline{\Phi_{\xi_{0,1}}((k^*)^2)}$$

Proposición

Las iteraciones del L -algoritmo genera un nuevo conjunto de exponentes monomiales para una de las cartas afín de NX .

Planteamiento del problema

Conjetura

Dada una variedad afín singular X , la iteración finita de la Modificación de Nash da lugar a una resolución de singularidades.

Si esta conjetura fuera cierta en el caso de superficies, se tendría la existencia de un morfismo $f : N^{i_0} X \rightarrow \tilde{X}$, tal que $\mathcal{N}^{i_0} = \pi \circ f$

$$\begin{array}{ccc}
 N^{i_0} X & \xrightarrow{f} & \tilde{X} \\
 & \searrow \mathcal{N}^{i_0} & \downarrow \pi \\
 & & X
 \end{array}$$

donde $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ es la resolución minimal de la superficie X

Proyecto de Investigación

Como **proyecto de investigación** nos planteamos estudiar en el caso de **superficies tóricas** una versión más débil del problema. Más precisamente:

¿Existirá un $i_0 \geq 0$ tal que exista un morfismo $f : N^{i_0} X \rightarrow \tilde{X}$?

Una observación importante es que no estamos solicitando que $N^{i_0} X$ sea una superficie suave.

Sea $\xi_0 = \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\} \subset \mathbb{Z}^2$ un conjunto minimal de exponentes monomiales de alguna superficie tórica X_σ .

Sea $L(x, y) = ax + by$, donde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}$ y $\text{mcd}(a, b) = 1$ tal que $L(\xi) \geq 0$.

Dado i , sabemos que la transformación lineal L siguiendo el algoritmo de Nash escoge una carta afín U^i de $N^i X$ y existe i_0 talque existe $U^{i_0} \rightarrow \tilde{X}$.

Pero no es claro que las cartas afines que se obtienen con las TLs de pendiente racional cubran $N^{i_0} X$.

Ejemplo: Variedad tórica con punto doble racional de tipo A_4

Consideremos la superficie tórica X_σ , donde $\sigma = \text{cone}(e_2, 5e_1 - 4e_2)$ en forma normal que puede ser identificada con la variedad $V(z^5 - xy) \subseteq \mathbb{C}^3$, notemos que el origen es el único punto singular.

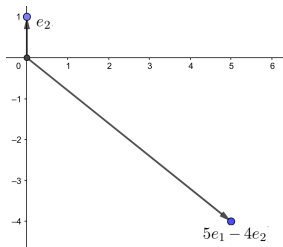


Figura: $\sigma = \text{cone}(e_2, 5e_1 - 4e_2)$

Ejemplo:

Primero hallamos una resolución de las singularidades de la variedad tórica X_σ , mediante **fracciones continuas de Hirzebruch-Jung** para $5/4$.

$$\frac{5}{4} = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}} = \| 2, 2, 2, 2 \|$$

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{v_5} & \mathbf{v_4} & \mathbf{v_3} & \mathbf{v_2} & \mathbf{v_1} & \mathbf{v_0} \\ \left(\begin{array}{cccccc} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{array}$$

Ejemplo:

Así obtenemos un refinamiento suave Σ de σ que consiste en los conos $\sigma_i = (v_{i-1}, v_i)$ para $1 \leq i \leq 5$ y todas sus caras.

El morfismo $\pi : X_\Sigma \rightarrow X_\sigma$ es una resolución de las singularidades de X_σ .

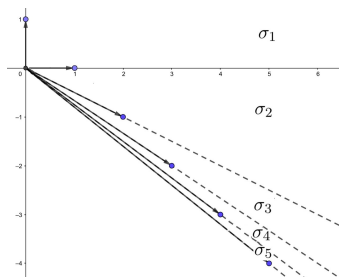


Figura: Refinamiento suave de σ

Además, corresponde a **resolución minimal** de las singularidades de X_σ .

Ejemplo:

Por otro lado, **Mediante la iteración del L -algoritmo de Nash** al conjunto de exponentes monomiales esencial $\xi_1^0 = \{(1, 0), (1, 1), (4, 5)\}$ para X_σ , cubriremos con cartas afín la superficie lisa X_Σ .

Con el vector v_1 dado por la resolución minimal, construimos la **primera** transformación lineal

$$L_1(x, y) = x$$

Ejemplo:

Aplicando el L -algoritmo a ξ_1^0 siguiendo L_1 obtenemos los siguientes caminos esenciales lisos:

$$L_1 : \quad \xi_1^0 \rightarrow \xi_1^1 \rightarrow \xi_1^2 \rightarrow \xi_1^3 \begin{array}{l} \nearrow \xi_1^4 \\ \searrow \xi_2^4 \end{array}$$

donde

$$\xi_1^0 = \{(1, 0), (1, 1), (4, 5)\}$$

$$\xi_1^1 = \{(1, 0), (1, 1), (3, 5), (3, 4)\}$$

$$\xi_1^2 = \{(1, 0), (1, 1), (2, 5), (2, 4), (2, 3)\}$$

$$\xi_1^3 = \{(1, 0), (1, 1), (1, 5), (1, 4), (1, 3), (1, 2)\}$$

$$\xi_1^4 = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

$$\xi_2^4 = \{(1, 5), (0, -1)\}$$

Ejemplo:

Los conjuntos ξ_1^4 y ξ_2^4 respectivamente generan en el espacio dual las cartas lisas afín $\sigma_1 = \text{cone}\{(1, 0), (0, 1)\}$ y $\sigma_{2,1} = \text{cone}\{(1, 0), (5, -1)\}$ de X_Σ .

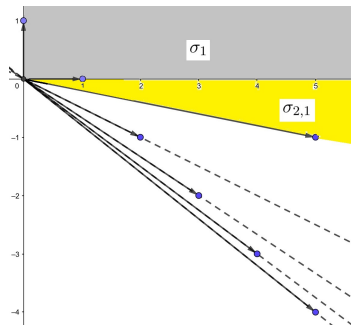


Figura: Cartas afín para X_Σ siguiendo L_1

Ejemplo:

La carta lisa afín $\sigma_{2,1} = \text{cone}\{(1, 0), (5, -1)\}$ de X_Σ nos permite construir una **segunda** transformación lineal

$$L_2(x, y) = 5x - y$$

Aplicando el L -algoritmo al conjunto ξ_1^0 siguiendo L_2 obtenemos los siguientes caminos esenciales lisos:

$$L_2 : \quad \xi_1^0 \rightarrow \xi_1^1 \rightarrow \xi_1^2 \begin{array}{l} \nearrow \xi_1^3 \rightarrow \xi_2^4 \\ \searrow \xi_2^3 \rightarrow \xi_3^4 \end{array}$$

donde

$\xi_1^0, \xi_1^1, \xi_1^2, \xi_1^3$ y ξ_2^4 como antes

$$\xi_2^3 = \{(-1, -5), (1, 3), (0, -1)\}$$

$$\xi_3^4 = \{(-1, -5), (1, 4)\}$$

Ejemplo:

Los conjuntos ξ_2^4 y ξ_3^4 generan (en el espacio dual), las cartas lisas afín $\sigma_{2,1} = \text{cone}\{(1, 0), (5, -1)\}$ y $\sigma_{2,2} = \text{cone}\{(5, -1), (4, -1)\}$ de X_Σ ,

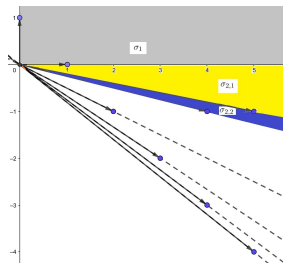


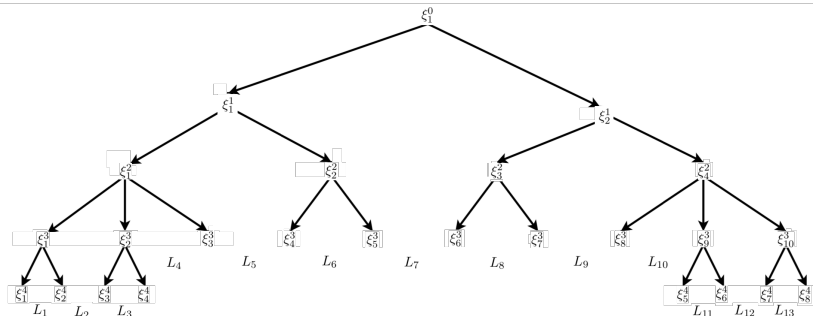
Figura: Cartas afín para X_Σ siguiendo L_1 y L_2

La carta lisa afín $\sigma_{2,1}$ es la misma obtenida con L_1 , lo que nos asegura el pegado de las cartas afín en X_Σ

Ejemplo:

La carta lisa $\sigma_{2,2}$ nos permite construir una **tercera** transformación lineal $L_3(x, y) = 4x - y$.

Siguiendo éste proceso, obtenemos el siguiente diagrama de caminos esenciales lisos:



Ejemplo:

La iteración del algoritmo da lugar a un árbol en el que cada rama tiene asociada una carta afín para la variedad X_Σ .

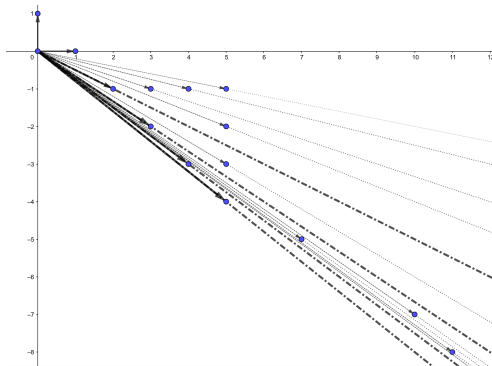


Figura: X_Σ queda cubierta por 14 cartas afines

Ejemplo:

Se ha construido un abanico Σ' que es un refinamiento de Σ y en particular también lo es de σ .

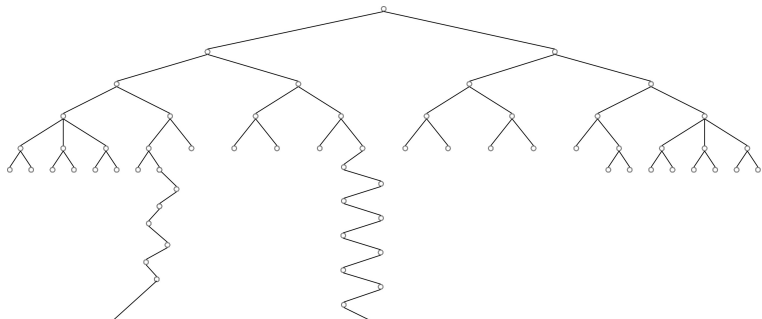
Por lo tanto, **la iteración del L -algoritmo de Nash entregó otra resolución de singularidades $\mathcal{N} : X_{\Sigma'} \rightarrow X_{\sigma}$** . Además tenemos la existencia del morfismo $f : X_{\Sigma'} \rightarrow X_{\Sigma}$ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 X_{\Sigma'} & \xrightarrow{f} & X_{\Sigma} \\
 & \searrow \mathcal{N} & \downarrow \pi \\
 & & X
 \end{array}$$

Es decir, $\mathcal{N} = \pi \circ f$.

Plan de Trabajo

Dada una variedad tórica X_σ donde $\sigma = \text{cone}\{(e_2, de_1 - ke_2)\}$ y $\xi_0 = \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\} \subset \mathbb{Z}^2$. Sabemos que la iteración del algoritmo da lugar a un **árbol esencial** de la forma



¿Si $L(x, y) = rx + sy$ es una transformación lineal con pendiente real, existe una transformación lineal $L(x, y) = ax + by$ con pendiente racional que realiza el mismo camino esencial?

Proposición 1 (2019)

Sean $\xi_1^0 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ un conjunto de exponentes monomiales esencial de alguna superficie tórica y $\mathcal{P}_L^j : \xi_1^0 \rightarrow \xi_{i_1}^1 \rightarrow \xi_{i_2}^2 \rightarrow \dots \rightarrow \xi_{i_j}^j$ un camino esencial generado hasta la j -ésima iteración del L -algoritmo de Nash siguiendo una transformación lineal L con **pendiente irracional q** . Entonces existe un intervalo uniconductal $]\alpha_j, \beta_j[\subset \mathbb{R}$ que contiene a q donde cada transformación lineal T con pendiente $m \in]\alpha_j, \beta_j[$ recorre el camino esencial \mathcal{P}_L^j .

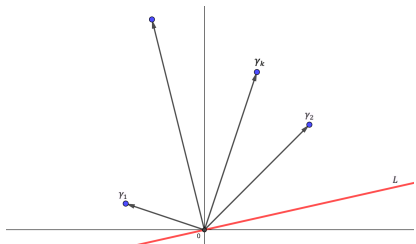
Idea de la demostración:

Sean $\xi_1^0 = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_r\} \subset \mathbb{Z}^2$ y $L(x, y) = ax + by$ una TL con pendiente irracional q tal que $L(\xi_1^0) \geq 0$.

Notemos que

$$0 < L(\gamma_1) < L(\gamma_2) < \dots < L(\gamma_r)$$

Entonces L escoge a γ_1 y γ_2 .



Por otro lado, notemos que la función distancia $d(L, \gamma) := \frac{|a\gamma_1 + b\gamma_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ induce el orden estricto:

$$0 < d(L, \gamma_1) < d(L, \gamma_2) < \dots < d(L, \gamma_r)$$

Idea de la demostración:

Como d es continua, existe $\epsilon_1 > 0$ donde cada TL con pendiente $m \in]q - \epsilon_1, q + \epsilon_1[$ respeta las desigualdades (1) y (2).

Por lo tanto cada TL con $m \in]q - \epsilon_1, q + \epsilon_1[$ **hace la misma elección** que L , Es decir recorren el camino

$$\mathcal{P}_L^1 : \xi_1^0 \rightarrow \xi_{i_1}^1$$

Por recurrencia, recorren el camino esencial

$$\mathcal{P}_L^j : \xi_1^0 \rightarrow \xi_{i_1}^1 \rightarrow \xi_{i_2}^2 \rightarrow \cdots \rightarrow \xi_{i_j}^j$$

generado por L hasta la j -ésima iteración, también es recorrido por cada TL con pendiente

$$m \in]\alpha_j, \beta_j[=]q - \epsilon_j, q + \epsilon_j[$$

Problemática

Sea $\xi_1^0 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ un conjunto minimal de exponentes monomiales de alguna superficie tórica X_σ .

Sean $L(x, y)$ una TL con **pendiente irracional** q tal que $L(\xi) \geq 0$ y

$$\mathcal{P}_L^j : \xi_1^0 \rightarrow \xi_{i_1}^1 \rightarrow \xi_{i_2}^2 \rightarrow \dots \rightarrow \xi_{i_j}^j$$

el camino esencial generado por j iteraciones del algoritmo siguiendo L .

Sabemos que **existe un intervalo** $I =]\alpha_j, \beta_j[$ **donde cada TL con pendiente** $m \in I$ **recorre** \mathcal{P}_L^j .

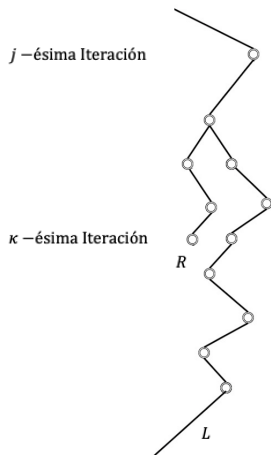
Además para cada TL racional R con pendiente en I existe $\kappa_R \in \mathbb{Z}$ de modo que después de κ_R iteraciones \mathcal{P}_R^j es liso.

Problemática

- Si $\kappa_R \leq j$, para alguna TL R con pendiente en $]\alpha_j, \beta_j[$, entonces \mathcal{P}_j es liso.
- Si $\kappa_R > j$ para toda transformación lineal racional R con pendiente en $]\alpha_j, \beta_j[$, entonces podemos iterar el algoritmo κ_R veces siguiendo $L(x, y)$, el camino esencial queda:

$$\mathcal{P}_{\kappa_R} : \xi_1^0 \rightarrow \xi_{i_1}^1 \rightarrow \xi_{i_2}^2 \rightarrow \dots \rightarrow \xi_{i_j}^j \rightarrow \dots \rightarrow \xi_{i_{\kappa}}^{\kappa}$$

y el intervalo uniconductal es $]\alpha_{\kappa_R}, \beta_{\kappa_R}[$, que no necesariamente contiene la pendiente de R .



Plan de Análisis

- Probar la existencia de

$$\kappa_{Max} = Max \{ \kappa_R \mid R \text{ tiene pendiente racional} \}$$

Muchas Gracias!!