Coloquio Inst-Mat
Instituto de Matemáticas
Universidad de Talca
Camino Lircay S/N, Campus Norte, Talca-Chile

Sumas de cuadrados en cuerpos de funciones y la conjetura de Pfister.

Gonzalo Manzano Flores*
Universidad de Santiago de Chile - Universiteit Antwerpen

Abstract

El estudio de las sumas de cuadrados en cuerpos tiene su origen en el famoso resultado de Euler (1760), el cual establece que cada suma de cuadrados en $\mathbb{Q}$ es una suma de 4 cuadrados. Otro famoso resultado relacionado a este tópico es el problema 17° de Hilbert, el cual establecía la pregunta ¿es todo polinomio $f \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ tal que $f(x) \geq 0$, una suma de cuadrados en $\mathbb{R}(X_1, ..., X_n)$? Esta pregunta fue respondida afirmativamente por E. Artin en 1927. Sin embargo, aún quedaba la interrogante ¿existe algún número fijo d tal que cada suma de cuadrados en $\mathbb{R}(X_1, ..., X_n)$ es una suma de d cuadrados (tal como en $\mathbb{Q}$)? ¡Sí! en efecto, A. Pfister demostró que en este caso $d = 2^n$. Así, para un cuerpo arbitrario K, uno puede definir el menor entero positivo d (si tal entero existe) tal que cada suma de cuadrados en K es una suma de d cuadrados. Este entero d asociado a K se llama el *número de Pitágoras de* K y se denota por $p(K)$. Si tal entero no existe escribimos $p(K) = \infty$. Una pregunta aún abierta, que fue conjeturada por A. Pfister es la siguiente ¿$p(K) < \infty$, implica que $p(K(X)) < \infty$? Observemos primero que una respuesta afirmativa a esta conjetura demostraría que $p(K(X_1, ..., X_n)) < \infty$, en el caso donde $p(K) < \infty$.

En esta charla, me enfocaré en mostrar un reciente resultado que obtuvimos en conjunto con mis colegas D. Grimm (Usach), K. J. Becher, M. Zaninelli (Universiteit Antwerpen-Bélgica) y N. Daans (Charles University-República checa), el cual establece que; si $p(K(X)) \leq 2$, entonces $p(K(X, Y)) \leq 8$.

*e-mail: gonzalo.manzano@usach.cl

References

[1] K.J. Becher, N. Daans, D. Grimm, G. Manzano-Flores, M. Zaninelli.The Pythagoras number of a rational function field in two variables. https://arxiv.org/abs/2302.11425 (2023).